

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA,  
MOD. A, AA 13/14  
ESERCIZI DEL 03/12/13**

- (1) Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni misurabili su uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Supponiamo che

$$f_n \rightarrow f \text{ in misura}$$

e che per qualche  $p \in [1, \infty)$

$$\|f_n\|_p \leq 10 \text{ per ogni } n .$$

Provare che  $f \in L^p(X)$  .

- (2) Sia dato uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Sia  $\{E_n\}$  una successione di insiemi misurabili di misura finita tali che

$$\mu(E_n \triangle E_m) \rightarrow 0 , \text{ per } n, m \rightarrow \infty .$$

Provare che esiste  $E$  misurabile di misura finita tale che

$$\|\chi_{E_n} - \chi_E\|_1 \rightarrow 0 , \text{ per } n \rightarrow \infty .$$

- (3) Sia  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ . Sia  $f$  integrabile, secondo Lebesgue, su  $\mathbb{R}_+^2$ . Provare che la funzione

$$g(x, y) = yf(y \sinh x, y(\cosh x - \sinh x))$$

è integrabile, secondo Lebesgue, su  $\mathbb{R}_+^2$ .